

ΘΕΜΑ Α

7 Αυγ 09

A1. Σελίδα 31

A2. Σελίδα 22.

A3. Σελίδα 86-87

A4. $\Lambda, \Sigma, \Lambda, \Lambda, \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

$$(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$$

$$\Rightarrow 3x-1=0 \quad \text{ή} \quad 8x^2-6x+1=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad \Delta = 36 - 32 = 4 \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{16} \begin{cases} \rightarrow 1/2 \\ \rightarrow 1/4 \end{cases}$$

Αρα $K = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$

B1. Οι ηίκες του K αντιστοιχούν στις πιθανότητες των $A, A \cap B$ & $A \cup B$ όπως $A \cap B \subset A \subset A \cup B$

Επίσης $P(A \cap B) < P(A) < P(A \cup B)$.
Γεγονικά $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

B2 $P(A' - B') = P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{1}{6}$

$P(D) = P(A \cap B) = \frac{3}{4} - P(A \cap B) = \frac{3}{4}$ www.ereunitiko.gr

B3 $P(E) = P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A-B) + P(B-A) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

B4 $9x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \Delta = 9 + 72 = 81 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{18} \begin{cases} \rightarrow 2/3 \\ \rightarrow -1/3 \end{cases}$

$P(\Gamma) = 2/3$ Έστω B, Γ ασυμπίερα $P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{13}{12} > 1$

$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

Άρα όχι ασυμπίερα

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

ΚΛΑΣΕΙΣ	$f_i \%$	x_i	$x_i^2 \cdot f_i$
$[8, 10)$	10	9	8.1
$[10, 12)$	10	11	12.1
$[12, 14)$	30	13	50.7
$[14, 16)$	20	15	45.0
$[16, 18)$	30	17	86.7
Σύνολο	100	//	202.6

- $F_1 \% = f_1 \% = 10$ ποσοστό παρατηρήσεων μικρότερο του 10
- $f_5 \% = 30$ >> μεγαλύτερες ή ίσες του 16.
- $w_3 = f_3 \cdot 360 = 108$ η γωνία του κυκλικού γραφικού $n > 3$ κλάσων
- $\Rightarrow f_3 \% = 30$

$$\bar{x} = 14 \Rightarrow 9 \cdot 0,10 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,30 = 14$$

$$\Rightarrow 0,9 + 3,9 + 5,1 + 11f_2 + 15f_4 = 14$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 11f_2 + 15f_4 = 4,1 \\ \text{όμως } \sum f_i = 1 \Rightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f_2 = 0,1 \\ f_4 = 0,2 \end{array}$$

Γ2

$$s^2 = \frac{1}{v} \left(\sum x_i^2 v_i - \frac{(\sum x_i v_i)^2}{v} \right) = \sum x_i^2 f_i - (\bar{x})^2$$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{202,6}{14} - 196 = 6,6 \quad \text{Δημοτικό - Γυμνάσιο - Λύκειο}$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{6,6}}{14} = \frac{2,57}{14} \approx 0,18 > 0,10 \quad \text{ανομοιογένεια δείγμα}$$

Γ3

$$\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 1780 \quad \bullet \quad \frac{x_1 v_1}{v} + \frac{x_2 v_2}{v} + \frac{x_3 v_3}{v} + \frac{x_4 v_4}{v} + \frac{x_5 v_5}{v} = 14$$

$$\Rightarrow \frac{1780}{v} + 17 \cdot f_5 = 14 \Rightarrow \frac{1780}{v} = 8,9 \Rightarrow v = 200$$

Γ4

Δ. ΑΥΣΘ

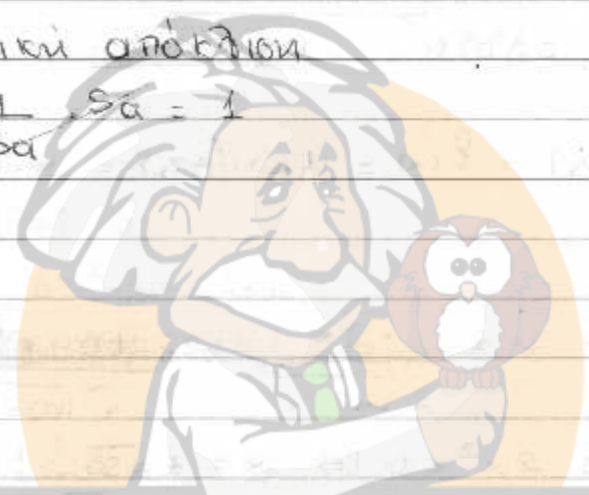
$$\text{Ισχύει } \beta_i = \frac{1}{S_a} a_i - \bar{a}$$

μέση τιμή $\bar{\beta}$ προκύπτει (από την εφαρμογή) του β.χ. βιβλίου

$$\bar{\beta} = \frac{1}{S_a} \bar{a} - \bar{a} = 0.$$

Ομοίως, η τυπική απόκλιση

$$S_{\beta} = \frac{1}{S_a} S_a = 1$$



ΤΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΚΑΡΑΦΥΛΛΗΣ - ΠΟΠΠΗ

Δημοτικό - Γυμνάσιο - Λύκειο

Ηράκλεια 2325770066 www.ereunitiko.gr

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Το $\triangle A\Delta B$ είναι ορθογώνιο, επομένως η $\hat{A} = 90^\circ$
Είδη: βαίνει σε ημικύκλιο.

$$\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow 10^2 = x^2 + A\Delta^2$$
$$\Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{100 - x^2}$$

$$\mu\epsilon \quad 100 - x^2 > 0 \Rightarrow -10 < x < 10$$

$$\delta\mu\omega\varsigma \quad x > 0, \text{ οπότε } \underline{0 < x < 10}$$

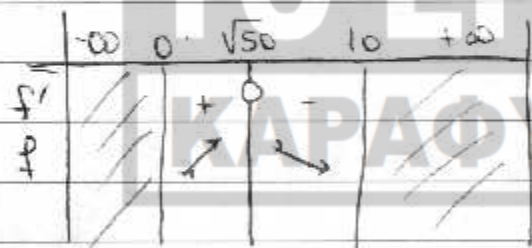
$$\text{Επομένως } (A\Delta B) = f(x) = (A\Delta) \cdot (AB) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}, \quad 0 < x < 10$$

Δ2

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{50}$$

$$x > 0, \text{ άρα } x = \sqrt{50}$$



Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο
για $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Δημοτικό Γυμνάσιο - Λύκειο

άρα το $\triangle A\Delta B$ είναι ισοσκελές.

Ηράκλεια 2325770066 www.ereunitiko.gr

Δ3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{98} \cdot \frac{f(1+x) - f(1)}{x+1 - 1} = \frac{1}{98} f'(1)$$
$$= \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

D4

Ισχύει $A - B \subseteq A \Rightarrow 0 < P(A-B) \leq P(A) \leq 1$.

$$\begin{aligned} & \text{f} \uparrow \\ & \text{στ} \omega \in (0,1] \\ & \text{f}(P(A-B)) \leq \text{f}(P(A)) \\ \Rightarrow & P(A-B) \sqrt{100 - [P(A-B)]^2} \leq P(A) \sqrt{100 - P^2(A)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - (P(A-B))^2}}$$

$$\text{f} \uparrow (0,1] \text{ * } \left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \right) \leq \left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \right)$$

* Έχουμε $0 < P(A-B) \leq 1$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P^2(A) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -P^2(A) \leq 0$$

$$\Rightarrow 99 \leq 100 - P^2(A) \leq 100 \Rightarrow \sqrt{99} \leq \sqrt{100 - P^2(A)} \leq \sqrt{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Αν ποτίσω κατά μέτρον τις δύο ανισώσεις έχω

$$0 \leq \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{\sqrt{99}}{99} \leq 1$$

Ηράκλεια 2325770066 www.ereunitiko.gr

Nicolaos Ziras,
Μαθηματικός