ΘΕΜΑ Α

A1. Σελίδα 31
A2. Σελίδα 22.
A3. Σελίδα 86-87
A4. Λ, Σ, Λ, Λ, Σ.

ΘΕΜΑ Β.

$(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$

$\Rightarrow 3x-1=0$ ή $8x^2-6x+1=0$

$\Rightarrow x=\frac{1}{3}$ ή $\Delta=36-32=4 \quad x_{1,2}=\frac{6\pm 2}{16} \begin{cases} \to 1/2 \\ \to 1/4 \end{cases}$

Άρα $K=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$

B1. Οι τιμές του K αντιστοιχούν στις πιθανότητες των A, $A\cap B$ & $A\cup B$ όμως $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$

άρα $P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$.

Τελικά $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

B2. $P(A'-B')=P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)-P(A)=\frac{1}{6}$

$P(\Delta)=P\left((A\cap B)'\right)=1-P(A\cap B)=\frac{3}{4}$.

B3. $P(E)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}$.

B4. $9x^2-3x-2=0 \quad \Delta=9+72=81 \quad x_{1,2}=\frac{3\pm 9}{18} \begin{cases} \to 2/3 \\ \to -1/3 \end{cases}$

$P(\Gamma)=2/3$ Έστω B,Γ ασυμβίβαστα $P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ $\quad = \frac{5}{12}+\frac{8}{12}=\frac{13}{12}>1$

$\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

Άρα όχι ασυμβίβαστα

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

ΚΛΑΣΕΙΣ	$f_i\%$	x_i	$x_i^2 \cdot f_i$
[8, 10)	10	9	8.1
[10, 12)	10	11	12.1
[12, 14)	30	13	50.7
[14, 16)	20	15	45.0
[16, 18)	30	17	86.7
Σύνολο	100	///	202.6

- $F_1\% = f_1\% = 10$ ποσοστό παρατηρήσεων μικρότερο του 10

$f_5\% = 30$ » μεγαλύτερες ή ίσες του 16.

$\omega_3 = f_3 \cdot 360 = 108$ η γωνία του κυκλικού τομέα της 3ης κλάσης

$\Rightarrow f_3\% = 30$

$\bar{x} = 14 \Rightarrow 9 \cdot 0,10 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,30 = 14$

$\Rightarrow 0,9 + 3,9 + 5,1 + 11 f_2 + 15 f_4 = 14$

$\Rightarrow \boxed{11 f_2 + 15 f_4 = 4,1}$

όμως $\Sigma f_i = 1 \Rightarrow \boxed{f_2 + f_4 = 0,3}$ $\Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} f_2 = 0,1 \\ f_4 = 0,2 \end{matrix}$

Γ2

$$s^2 = \frac{1}{v}\left(\Sigma x_i^2 v_i - \frac{(\Sigma x_i v_i)^2}{v}\right) = \Sigma x_i^2 f_i - (\bar{x})^2$$

$\Rightarrow s^2 = 202,6 - 196 = 6,6$

$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{6,6}}{14} = \frac{2,57}{14} \simeq 0,18 > 0,10$ ανομοιογενές δείγμα.

Γ3

$\sum_{i=1}^{4} x_i v_i = 1780$, $\frac{x_1 v_1}{v} + \frac{x_2 v_2}{v} + \frac{x_3 v_3}{v} + \frac{x_4 v_5}{v} + \frac{x_5 v_5}{v} = 14$

$\Rightarrow \frac{1780}{v} + 17 \cdot f_5 = 14 \Rightarrow \frac{1780}{v} = 8,9 \Rightarrow v = 200$

Γ4

Ισχύει $\beta_i = \frac{1}{s_\alpha}\alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}$

Η μέση τιμή $\bar{\beta}$ προκύπτει (από την εφαρμογή του σχ. βιβλίου)

$$\bar{\beta} = \frac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha} = 0.$$

Ομοίως, η τυπική απόκλιση

$$s_\beta = \frac{1}{\cancel{s_\alpha}} \cdot \cancel{s_\alpha} = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Το $\overset{\triangle}{ΑΔΒ}$ είναι ορθογώνιο, επομένως η $\hat{Α} = 90$ διότι βαίνει σε ημικύκλιο.

$$ΔΒ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 \Leftrightarrow 10^2 = x^2 + ΑΔ^2$$

$$\Leftrightarrow ΑΔ = \sqrt{100-x^2}$$

με $100 - x^2 > 0 \Rightarrow -10 < x < 10$

όμως $x > 0$, οπότε $0 < x < 10$

Επομένως $(ΑΒΓΔ) = f(x) = (ΑΔ)\cdot(ΑΒ) = x\cdot\sqrt{100-x^2}$, $0<x<10$

Δ2.

$$f'(x) = \sqrt{100-x^2} + x\,\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = \frac{100-x^2-x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{50}$

$x>0$, άρα $x = \sqrt{50}$

	$-\infty$	0	$\sqrt{50}$	10	$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$ΑΒ = \sqrt{50}$, $ΑΔ = \sqrt{100-\sqrt{50}} = \sqrt{50}$

άρα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο

Δ3

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{98}\cdot\frac{f(1+x)-f(1)}{x+1-1} = \frac{1}{98}f'(1)$$

$$= \frac{1}{\cancel{98}}\cdot\frac{\cancel{98}}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4

Ισχύει $A-B \subseteq A \Rightarrow 0 < P(A-B) \le P(A) \le 1$

$\overset{f \nearrow}{\underset{\text{στο } x\in(0,1]}{\Longleftrightarrow}}$ $f(P(A-B)) \le f(P(A))$

$\Leftrightarrow P(A-B)\sqrt{100-[P(A-B)]^2} \le P(A)\sqrt{100-P^2(A)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le \dfrac{P(A)}{\sqrt{100-(P(A-B))^2}}$

$\overset{f\nearrow (0,1]}{\underset{*}{\Longleftrightarrow}}$ $f\left(\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right) \le f\left(\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$

* Έχουμε $0 < P(A-B) \le 1$

$0 \le P(A) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le P^2(A) \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -P^2(A) \le 0$

$\Leftrightarrow 99 \le 100 - P^2(A) \le 100 \Leftrightarrow \sqrt{99} \le \sqrt{100-P^2(A)} \le \sqrt{100}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{10} \le \dfrac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le \dfrac{\sqrt{99}}{99}$

Αν πολ/σω κατά μέλη τις δυο ανισώσεις έχω

$0 < \dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le \dfrac{\sqrt{99}}{99} < 1$

Νικόλαος Ζήργας
Μαθηματικός