

ΘΕΜΑ Α

A1 Σελίδα 194

A2 Σελίδα 188

A3 Σελίδα 150

A4. $\Lambda, \Sigma, \Lambda, \Sigma, \Sigma$



ΤΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΚΑΡΑΦΥΛΛΗΣ - ΠΟΠΠΗ

Δημοτικό - Γυμνάσιο - Λύκειο

Ηράκλεια 2325770066 www.ereunitiko.gr

ΘΕΜΑ Β

$$|z-4| = 2|z-1|$$

B1 $|z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1)$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4$$

$$\Leftrightarrow 3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2. \text{ Διάτ κύκλος } \epsilon(0,2)$$

$$p = 2$$

B2

a) $\bar{w} = \frac{2\bar{z}_1}{z_2} + \frac{2\bar{z}_2}{z_1}$

$$= \frac{\frac{8}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{\frac{8}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w$$

από $|z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 4$

$$\Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{4}{z_1}$$

ομοίως $\bar{z}_2 = \frac{4}{z_2}$

άρα $w \in \mathbb{R}$

β) $|w| = \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq 2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + 2 \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = 4$

$$\Leftrightarrow |w| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq w \leq 4$$

Ηράκλεια 2325770066 www.ereunitiko.gr

B3 Έχουμε $\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \Leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_2^2 = -4z_1z_2$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$$

$$(A\Gamma) = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1| |1-2i| = |z_1| \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

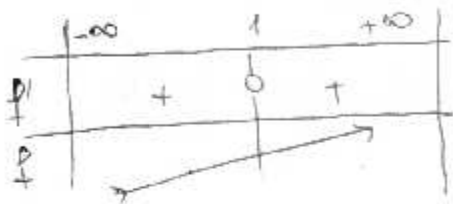
$$(B\Gamma) = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |z_1| |-1-2i| = 2\sqrt{5}$$

Άρα ίσοι κελές

ΘΕΜΑ Γ

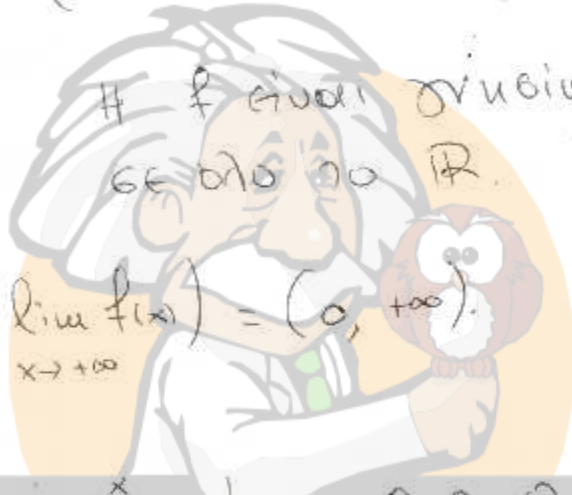
$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x+1)^2} \geq 0$$



Η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το \mathbb{R} .

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \frac{1}{x^2+1} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2+1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

ΤΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ
ΚΑΡΑΦΥΛΛΗΣ - ΠΟΠΠΗ
 Δημοτικό - Γυμνάσιο - Λύκειο
 Ηράκλεια 2325770066 www.ereunitiko.gr

Γ2

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2+1)) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f\left(e^3 \cdot \frac{x^2+1}{e^x}\right) = f(2)$$

"f-1"

$$\Leftrightarrow e^3 \cdot \frac{x^2+1}{e^x} = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2} > 0.$$

Η τιμή $\frac{e^3}{2} \in f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ άρα η δοθείσα
 εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ρίζα, όμως η f
 → & "f-1" άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα.

Γ3

$$\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2x f(4x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t) dt + \int_0^{2x} f(t) dt - 2x f(4x) < 0.$$

Έστω $h(x) = \int_0^{2x} f(t) dt + \int_{2x}^{4x} f(t) dt - 2x f(4x)$ (*)

Η h είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Η f(t) συνεχής άρα οι $\int_0^{2x} f(t) dt$ & $\int_{2x}^{4x} f(t) dt$ παραγωγοί.

(*) $\Rightarrow h'(x) = f(2x) + f(4x) - 2f(4x) - 8x f'(4x)$

$\Rightarrow h'(x) = f(2x) - f(4x) - 8x f'(4x) < 0$

διότι $f(x) > 0 \forall x > 0$ & $f'(x) > 0 \forall x > 0$.

Άρα η h ↓ στο $(0, +\infty)$.

από την (*) για $x=0$ $h(0)=0$

$x > 0 \xrightarrow{h \downarrow} h(x) < h(0) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2x f(4x)$

$$\Gamma 4$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_{2x}^{4x} f(t) dt, & x > 0 \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4f(4x) - 2f(2x)}{1}$$

$$= 4f(0) - 2f(0) = 2f(0) = 2 = g(0)$$

Άρα η g συνεχής στο 0 , για $x > 0$ συνεχής

ως πραγματικό συνεχές άρα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Η g παραγωγίσιμη, $g'(x) = \frac{(4f(4x) - 2f(2x))x - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2}$

$$= \frac{4x f(4x) - 2x f(2x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2} = \frac{2x f(4x) + 2x f(4x) - 2x f(2x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2}$$

$$= \frac{(2x f(4x) - 2x f(2x)) + (2x f(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt)}{x^2} > 0$$

Η $f \nearrow$ στο \mathbb{R} $x > 0 \Rightarrow 2x < 4x \Rightarrow f(2x) - f(4x) < 0$
 $\Rightarrow 2x (f(4x) - f(2x)) > 0$

$$\text{από } \Gamma 3 \quad 2x f(4x) > \int_{2x}^{4x} f(t) dt \Rightarrow \underline{2x f(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t) dt > 0}$$

Άρα η $g \nearrow$ στο $(0, +\infty)$ & επειδή
 είναι συνεχής στο 0 η $g \nearrow$ στο $[0, +\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

$f'(x) [e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2 \quad \cdot f(0) = 0$

Δ1

$f'(x) e^{f(x)} + f'(x) e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)'$

$\Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$ για $x=0, c=0$ άρα

$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 1 = 2xe^{f(x)} \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1$

$\Leftrightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow |e^{f(x)} - x| = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$

Απορρίπτουμε για $e^{f(x)} = x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ και $e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1}$

$\Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

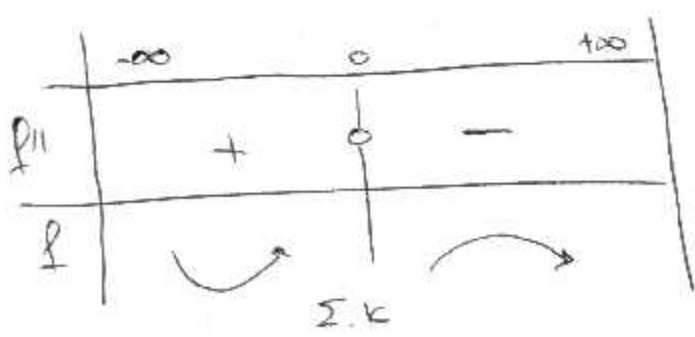


Δ2

α) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(x + \sqrt{x^2 + 1})\sqrt{x^2 + 1}}$

$\Rightarrow f''(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -\frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0, f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$



Η f στο $(-\infty, 0]$ κυρτή
 στο $[0, +\infty)$ κοίτη
 στο $(0, 0)$ σημείο καμπής.

Δ2

$$\beta). E = \int_0^1 |\ln(x + \sqrt{x^2+1}) - x| dx \quad (1)$$

Έστω $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - x$ (παράγωγιστη ως αθροισμα)
παράγωγιστων.

$$\rightarrow g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2+1 > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 1$$

άρα η $g \downarrow$ στο \mathbb{R} $g(0) = 0$ άρα $g(x) \leq 0$ για $x \geq 0$.

$$(1) \Rightarrow E = \int_0^1 (x - \ln(x + \sqrt{x^2+1})) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx$$
$$= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$x \int_0^1 (x)' \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx = \left[x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{x^2+1} dx$$
$$= \ln(1 + \sqrt{2}) - \left[\frac{1}{2} \ln|x^2+1| \right]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1)$$

ΤΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ
ΚΑΡΑΦΥΛΛΗΣ - ΠΟΠΠΗ

Δημοτικό - Γυμνάσιο - Λύκειο

Ηράκλεια 2325770066 www.ereunitiko.gr

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| \right] \quad (2)$$

Η $f^2(t)$ συνεχής στο \mathbb{R} , άρα η $\int_0^x f^2(t) dt$ παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , οπότε και η $e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1$ παραγ στο \mathbb{R} (άρα συνεχής).

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} > 0, \quad f \uparrow \text{ στο } \mathbb{R}, \quad x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$$

$$|f(x)| = f(x) \quad \text{για } x > 0 \quad \mu \in \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x) \stackrel{y=f(x)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \ln y = -\infty$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{\ln f(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x)}{f'(x) \ln^2 f(x)}$$

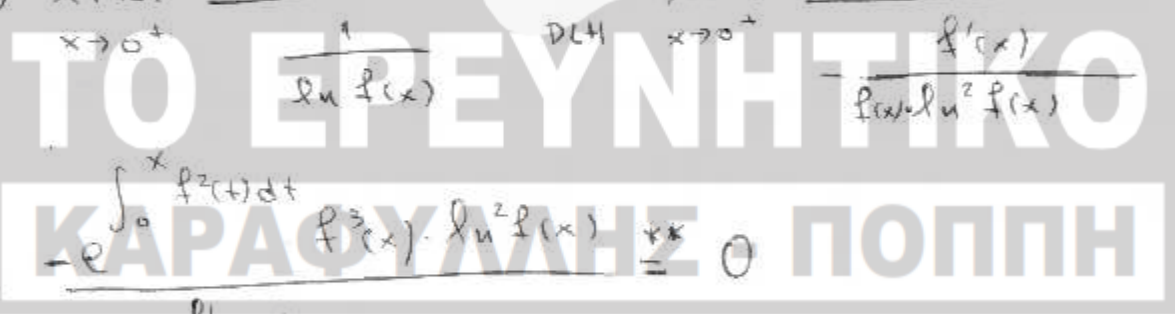
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x) \cdot \ln^2 f(x)}{f'(x)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} 0$$

Δημοτικό - Γυμνάσιο - Λύκειο

$$** \lim_{x \rightarrow 0^+} f^2(x) \ln^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) \ln f(x))^2 \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (u \cdot \ln u)^2$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} (u \cdot \ln u)^2 = \left[\lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \right) \right]^2 = \left(\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} \right)^2 = \left(\lim_{u \rightarrow 0^+} -u \right)^2 = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x)}{f'(x)} = -\frac{f(0)}{f'(0)} = 0.$$



Ηράκλεια 2325770066 www.ereunitiko.gr

Δ4.

$$\frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x-3} + \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x-2} = 0$$

$$\text{Έστω } g(x) = (x-2) \left(1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x-3) \left(8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right)$$

- Η g είναι συνεχής στο [2,3] ως πράξη των
συνεχών συναρτήσεων, (x-2), (1 - ∫₀^{x-2} f²(t) dt), ...

$$- g(2) = - \left[8 - 3 \int_0^2 f^2(t) dt \right] = 3 \int_0^2 f^2(t) dt - 8$$

Γνωρίζουμε από Δ2 $f(x) \leq x$ για κάθε $x > 0$, $f(x) > 0, x > 0$

$t \in [0,2]$, $f^2(t) \leq t^2 \Rightarrow f^2(t) - t^2 \leq 0$. (συνεχώς ή $f^2(t) - t^2$
& όχι 0 παντού)

$$\Rightarrow \int_0^2 (f^2(t) - t^2) dt < 0 \Rightarrow \int_0^2 f^2(t) dt - \int_0^2 t^2 dt < 0$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f^2(t) dt < \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \text{ άρα } \underline{g(2) < 0}$$

όμοια $g(3) = 1 - 3 \int_0^{3-2} f(t^2) dt$

$$t \in [0,1], f^2(t) - t^2 \leq 0 \Rightarrow \int_0^1 (f^2(t) - t^2) dt < 0$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \int_0^1 f^2(t) dt < \frac{1}{3}$$

άρα $g(3) > 0$, $g(2)g(3) < 0$ (συνέχεια από

$$\text{Θ. Bolzano ή } f(x) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x-3} - \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x-2} = 0$$

Έχει μια μοναδική ρίζα στο (2,3).

Ζητούμε Νικόλαος