ΘΕΜΑ Α

Α1 Σελίδα 194

Α2 Σελίδα 188

Α3 Σελίδα 150

Α4 Λ, Σ, Λ, Σ, Σ

ΘΕΜΑ Β

$$|z-4| = 2|z-1|$$

Β1 $|z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1)$

$\Leftrightarrow z\bar{z} - \cancel{4z} - \cancel{4\bar{z}} + 16 = 4z\bar{z} - \cancel{4z} - \cancel{4\bar{z}} + 4$

$\Leftrightarrow 3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$. Δηλ. κύκλος $K(0,0)$, $\rho = 2$.

Β2

α) $\bar{w} = \dfrac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \dfrac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$

όμως $|z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 4 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \dfrac{4}{z_1}$

όμοια $\bar{z}_2 = \dfrac{4}{z_2}$

$= \dfrac{\frac{8}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \dfrac{\frac{8}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = \dfrac{2z_2}{z_1} + \dfrac{2z_1}{z_2} = w$

άρα $w \in \mathbb{R}$

β) $|w| = \left|\dfrac{2z_1}{z_2} + \dfrac{2z_2}{z_1}\right| \le 2\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| + 2\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = 4$

$\Leftrightarrow |w| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le w \le 4$

Β3 Έχουμε $\dfrac{2z_1}{z_2} + \dfrac{2z_2}{z_1} = -4 \Leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_2^2 = -4z_1z_2$

$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$

$(ΑΓ) = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1||1-2i| = |z_1|\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$(ΒΓ) = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |z_1||-1-2i| = 2\sqrt{5}$

Άρα ισοσκελές

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ1

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x+1)^2} \geq 0$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0, +\infty).$$

$$- \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim e^x \cdot \frac{1}{x^2+1} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$, \lim_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$$

$$- \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Γ2

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f\left(e^3\cdot\frac{x^2+1}{e^x}\right)=f(2)$$

f "1-1"

$$\Leftrightarrow e^3\cdot\frac{x^2+1}{e^x}=2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}>0.$$

Η τιμή $\frac{e^3}{2}\in f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$ άρα η δοθείσα εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ρίζα, όμως η f $\nearrow$ & "1-1" άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα.

Γ3

$$\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt<2x\,f(4x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{4x} f(t)\,dt-2x\,f(4x)<0.$$

Έστω $h(x)=-\int_{0}^{2x} f(t)\,dt+\int_{0}^{4x} f(t)\,dt-2x\,f(4x)$ (1)

Η h είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Η $f(t)$ συνεχής άρα οι $\int_{0}^{2x} f(t)\,dt$ & $\int_{0}^{4x} f(t)\,dt$ παραγωγ.

$$(1) \Rightarrow h'(x)=-f(2x)+f(4x)-2f(4x)-8x\,f'(4x)$$

$$\Leftrightarrow h'(x)=-f(2x)-f(4x)-8x\,f'(4x)<0$$

διότι $f(x)>0\ \forall x>0$ & $f'(x)\geq 0\ \forall x>0$

Άρα η $h \searrow$ στο $(0,+\infty)$

από την (1) για $x=0$ $h(0)=0$

$$x>0 \xRightarrow{h\searrow} h(x)<h(0)=0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt<2x\,f(4x).$$

Γ4

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt, & x>0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{4f(4x)-2f(2x)}{1}$$

$$=4f(0)-2f(0)=2f(0)=2=g(0)$$

Άρα η g συνεχής στο 0, για $x>0$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών άρα συνεχής στο $[0,+\infty)$

Η g παραγωγίσιμη, $g'(x)=\dfrac{\left(4f(4x)-2f(2x)\right)x-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2}$

$$=\frac{4xf(4x)-2xf(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2}=\frac{2xf(4x)+2xf(4x)-2xf(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2}$$

$$=\frac{\left(2xf(4x)-2xf(2x)\right)+\left(2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right)}{x^2}>0$$

Η $f\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ $\quad x>0 \Rightarrow 2x<4x \Rightarrow f(2x)-f(4x)<0$

$\overset{2x>0}{\Rightarrow} 2x\left(f(4x)-f(2x)\right)>0$

από Γ3 $\quad 2xf(4x)>\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt \Rightarrow 2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt>0$

Δηλαδή η $g\nearrow$ στο $(0,+\infty)$ & επειδή είναι συνεχής στο 0 η $g\nearrow$ στο $[0,+\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

• $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$ • $f(0)=0$

Δ1

$f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}=2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$ για $x=0$, $c=0$ άρα

$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \overset{\cdot e^{f(x)}}{\Leftrightarrow} e^{2f(x)}-1=2xe^{f(x)} \Leftrightarrow e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1$

$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1 \Leftrightarrow \left|e^{f(x)}-x\right|=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)}=x\pm\sqrt{x^2+1}$.

Απορρίπτουμε την $e^{f(x)}=x-\sqrt{x^2+1}<0$, $e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Δ2

α) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}}{\cancel{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow f''(x)=-\dfrac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x<0$, $f''(x)<0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x>0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+	0	−
f	∪	Σ.Κ	∩

Η f στο $(-\infty,0]$ κυρτή
» $[0,+\infty)$ κοίλη
στο $(0,0)$ σημείο καμπής.

Δ2

β). $E = \int_0^1 |\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - x|\, dx$ (1)

Έστω $g(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - x$ (παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων)

$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$

$x \neq 0 \Rightarrow x^2+1 > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 1$.

άρα η $g \downarrow$ στο $\mathbb{R}$ $g(0)=0$ οπότε $g(x) \leq 0$ για $x \geq 0$.

(1) $\Rightarrow E = \int_0^1 (x - \ln(x+\sqrt{x^2+1}))\, dx \overset{*}{=} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})\, dx$

$= \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2})$

$* \int_0^1 (x)' \ln(x+\sqrt{x^2+1})\, dx = \left[x \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

$= \ln(1+\sqrt{2}) - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1)$

Δ3

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1\right)\ln|f(x)|\right] \quad (2)$$

Η $f^2(t)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η $\int_0^x f^2(t)\,dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η $e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1$ παραγ στο $\mathbb{R}$ (άρα συνεχής).

$$\lim_{x\to 0} e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1=0$$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}>0$, $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$, $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=0$

, $|f(x)|=f(x)$ για $x>0$ με $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln f(x) \overset{y=f(x)}{=} \lim\limits_{y\to 0}\ln y=-\infty$

$$(2) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\frac{1}{\ln f(x)}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{-\frac{f'(x)}{f(x)\ln^2 f(x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-e^{\int_0^x f^2(t)dt} f^3(x)\cdot \ln^2 f(x)}{f'(x)} \overset{**}{=} 0$$

$$** \lim_{x\to 0^+} f^2(x)\ln^2 f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)\ln f(x)\right)^2 \overset{u=f(x)}{=}$$

$$=\lim_{u\to 0^+}(u\cdot \ln u)^2=\left[\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\right)\right]^2=\left(\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}\right)^2=\left(\lim_{u\to 0^+}-u\right)^2=0$$

$$-\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f(x)}{f'(x)}=-\frac{f(0)}{f'(0)}=0.$$

Δ4.

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt}{x-3} + \frac{8-3\int_0^{x} f^2(t)\,dt}{x-2} = 0$$

Έστω $g(x) = (x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt\right) + (x-3)\left(8-3\int_0^{x} f^2(t)\,dt\right)$

- Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις των συνεχών συναρτήσεων $(x-2)$, $\left(1-\int_0^{x-2} f^2(t)\,dt\right)$, ...

- $g(2) = -\left[8-3\int_0^{2} f^2(t)\,dt\right] = 3\int_0^2 f^2(t)\,dt - 8$

γνωρίζουμε από Δ2 $f(x)\le x$ για κάθε $x\geq 0$, $f(x)>0$, $x>0$

$t\in[0,2]$, $f^2(t)\le t^2 \Leftrightarrow f^2(t)-t^2\le 0$. (συνεχής η $f^2(t)-t^2$ & όχι 0 παντού).

$\Rightarrow \int_0^2 \left(f^2(t)-t^2\right)dt<0 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t)\,dt - \int_0^2 t^2\,dt<0$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t)\,dt < \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$ άρα $g(2)<0$

όμοια $g(3) = 1-3\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt$

$t\in[0,1]$, $f^2(t)-t^2\le 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(f^2(t)-t^2\right)dt<0$

$\Rightarrow \dots\dots \Rightarrow \int_0^1 f^2(t)\,dt < \frac{1}{3}$

άρα $g(3)>0$, $g(2)g(3)<0$ επομένως από

Θ. Bolzano η $f(x)=0 \Rightarrow \dots\dots \Rightarrow \frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt}{x-3} + \frac{8-3\int_0^{x} f^2(t)\,dt}{x-2}=0$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

Σπύρτσης Νικόλαος