Θέμα Α   18/5/16   ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1 - σελίδα 262 σχολικό βιβλίο

Α2 - σελίδα 141 σχολικό βιβλίο

Α3 - σελίδα 247 σχολ. βιβλίο

Α4 - α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

Θέμα Β

$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \; x \in \mathbb{R}$

Β1) $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	ελάχιστο	$\nearrow$	

$x \in (-\infty, 0]$ η f είναι γν. φθίνουσα
$x \in [0, +\infty)$ η f είναι γν. αύξουσα
παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=0$ το $f(0)=0$

B2) $f''(x) = \dfrac{2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+1=0 \Leftrightarrow 3x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$		$\cup$		$\cap$

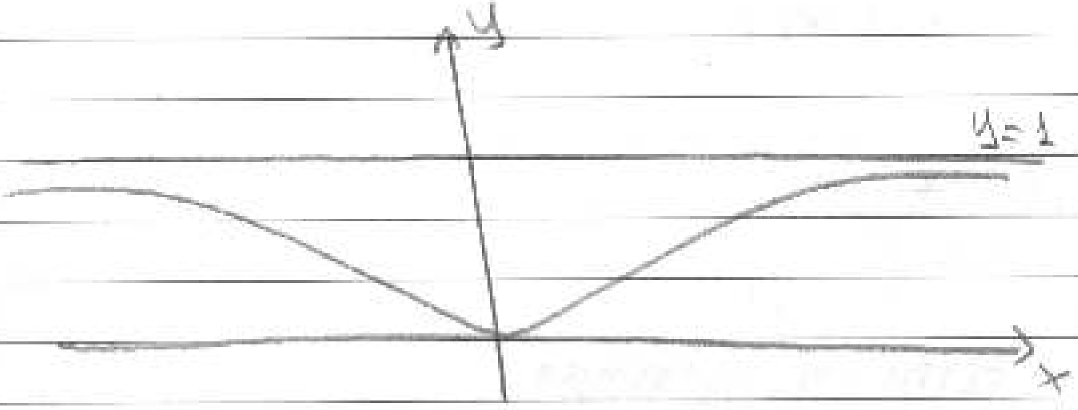
σημεία καμπής $f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{1}{4}$ και $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{1}{4}$

B3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$

Επομένως, οριζόντια ασύμπτωτη η $\varepsilon: y=1$ στο $\pm\infty$

B4)

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f'	$-$		$-$		$+$		$+$	
f''	$-$		$+$		$+$		$-$	
f	↘		↘		↗		↗	



Θέμα Γ

Γ1) Θεωρώ συν/ση $g(x)=e^{x^2}-x^2-1$

$g'(x)=2x(e^{x^2}-1)$

ισχύει: $x^2\geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2}\geq e^0 \Leftrightarrow e^{x^2}\geq 1 \Leftrightarrow e^{x^2}-1\geq 0$

x		0	
$2x$	$-$	0	$+$
$e^{x^2}-1$	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$-$		$+$

x		0	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

η g είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$
παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ το $g(0)=0$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)\geq g(0) \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1=0$
άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

Γ2) $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow (e^{x^2}-x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow x=0$
η f έχει μοναδική ρίζα την $x=0$ και διατηρεί πρόσημο στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

$\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{(e^{x^2}-x^2-1)^2} \Leftrightarrow |f(x)|=e^{x^2}-x^2-1$, $e^{x^2}-x^2-1\geq 0$

Αν $f(x)>0$ στο $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$

Αν $f(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, $f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1)$, $x\in\mathbb{R}$

Αν $f(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ και $f(x)>0$ στο $(0,+\infty)$

$$f(x)=\begin{cases}-(e^{x^2}-x^2-1), & x<0\\ e^{x^2}-x^2-1, & x>0\end{cases}$$

Αν $f(x)>0$ στο $(-\infty,0)$ και $f(x)<0$ στο $(0,+\infty)$

$$f(x)=\begin{cases}e^{x^2}-x^2-1, & x<0\\ -(e^{x^2}-x^2-1), & x\geq 0\end{cases}$$

Γ3) $f''(x) = 2(e^{x^2}-1)+4x^2e^{x^2} \geq 0$, το "=" ισχύει μόνο για $x=0$

- $2(e^{x^2}-1)\geq 0$
- $4x^2 \geq 0$
- $e^{x^2} \geq 0$

$f''(x)\geq 0$

άρα η f κυρτή στο $\mathbb{R}$

Γ4) θεωρώ $h(x)=f(x+3)-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

$h'(x)=f'(x+3)-f'(x)$

για $x>0 \Leftrightarrow x+3>x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x+3)>f'(x) \Rightarrow$

$f'(x+3)-f'(x)>0 \Rightarrow h'(x)>0$ άρα $h\uparrow$, άρα h "1-1"

$f(|ημx|+3)-f(|ημx|) = f(x+3)-f(x) \Leftrightarrow h(|ημx|)=h(x) \overset{h\text{ "1-1"}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow |ημx|=x \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} |ημx|=|x| \Leftrightarrow x=0$

γιατί $|ημx|\leq|x|$ και το "=" ισχύει μόνο για $x=0$

Θέμα Δ

Δ1) $\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\,\eta\mu x\,dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^\pi (f(x)\eta\mu x + f''(x)\eta\mu x)\,dx=\pi$

$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\cdot\eta\mu x\,dx + \int_0^\pi f''(x)\cdot\eta\mu x\,dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx + \int_0^\pi (f'(x))'\eta\mu x\,dx=\pi$

$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx = \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{\int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx} + [f'(x)\eta\mu x]_0^\pi - [f(x)\,\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi - \cancel{\int_0^\pi f(x)\cdot\eta\mu x\,dx}=\pi$

$\Leftrightarrow f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\cdot\eta\mu 0 - f(\pi)\,\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0 = \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -f(\pi)\cdot(-1)+f(0)\cdot 1=\pi \Leftrightarrow \boxed{f(\pi)+f(0)=\pi}$ (1)

• $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot1=1$

Θέτω $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\neq0$ με $\lim_{x\to0}g(x)=1$ για x κοντά στο 0

$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}(x\cdot g(x))=0\cdot1=0$

η f συνεχής άρα $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow \boxed{f(0)=0}$

(1) $\Rightarrow f(\pi)+0=\pi \Leftrightarrow f(\pi)=\pi$

$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$

Δ2 α) $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^{x}$

$e^{f(x)}f'(x)+1=f'(f(x))\cdot f'(x)+e^{x}$ (1)

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0. Από Θ. Fermat

$f'(x_0)=0$

(1) $\Rightarrow e^{f(x_0)}\cdot 0+1=f'(f(x_0))\cdot 0+e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0}=1 \Leftrightarrow x_0=0$, άτοπο

Άρα η f δεν έχει ακρότατο.

β) $f'(x)\neq 0$ και $f'(x)$ συνεχής άρα η f' διατηρεί πρόσημο

$f'(0)=1$ άρα $f'(x)>0$ δηλ. $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

Δ3) Επειδή $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ δηλ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$

$\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|}\leq\frac{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|}\leq\frac{2}{|f(x)|}$

$-\frac{2}{|f(x)|}\leq\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\leq\frac{2}{|f(x)|}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{|f(x)|}\right)=0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{|f(x)|}\right)=0$

$\xrightarrow{\text{κ.π.}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$

Δ4) ν.δ.ο $0<\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$

$1\le x\le e^{\pi} \Leftrightarrow 0\le \ln x\le \pi \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0)\le f(\ln x)\le f(\pi)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\le f(\ln x)\le \pi \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{0}{x}\le\frac{f(\ln x)}{x}\le\frac{\pi}{x}$

Άρα $0<\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi\left[\ln x\right]_1^{e^{\pi}}=\pi^2$.

Αντωνία Αραμπατζή

Μαθηματικός